

بسم الله الرحمن الرحيم

کلاس نکته و تست
نظریه زبان ها و ماشین ها

ابوالفضل گیلک

جلسه هشتم – فصل چهارم
تست های 17 الی 41
ویژگی های زبان های منظم

حل تست های 15 سال اخیر

ارشد – دکتری

مهندسی کامپیوتر – علوم کامپیوتر

فصل 4

تست‌های 17 الی 41

ویژگی‌های زبان‌های منظم

17- اگر برای هر دو زبان $L \subseteq \Sigma^*$ و $K \subseteq \Sigma^*$ تعریف کنیم:

$$K^{-1}L = \{w \in \Sigma^* \mid \exists z \in K, zw \in L\}$$

(علوم کامپیوتر - 84)

آن‌گاه کدام گزاره همواره درست است؟ (کلیه زبان‌ها در Σ^* هستند).

$$(L_1 \cap L_2)^{-1}K = L_1^{-1}K \cap L_2^{-1}K \quad (2)$$

$$(L_1 \cup L_2)^{-1}K = L_1^{-1}K \cup L_2^{-1}K \quad (1)$$

$$K^{-1}(L_1 \cup L_2) \neq K^{-1}L_1 \cup K^{-1}L_2 \quad (4)$$

$$K^{-1}(L_1 \cap L_2) \supseteq K^{-1}L_1 \cap K^{-1}L_2 \quad (3)$$

18- فرض کنید w^R معکوس رشته w و L_4 و L_5 دو زبان منظم دلخواه باشند. زبان‌های L_1 ، L_2 و L_3 به شرح زیر مفروضند:

$$L_1 = \{ww^Rv \mid v, w \in \{a, b\}^*\}$$

$$L_2 = \{w_1cw_2 \mid w_1, w_2 \in \{a, b\}^*, w_1 \neq w_2\}$$

$$L_3 = \{w \mid w \in L_4, w^R \in L_5\}$$

کدام گزینه درست است؟

(مهندسی کامپیوتر - 81)

$$L_1, L_2 \text{ و } L_3 \text{ هر سه منظم‌اند.} \quad (2)$$

$$L_1, L_2 \text{ و } L_3 \text{ نامنظم‌اند.} \quad (1)$$

$$L_1 \text{ و } L_2 \text{ نامنظم‌اند اما } L_3 \text{ منظم است.} \quad (4)$$

$$L_1 \text{ و } L_3 \text{ منظم ولی } L_2 \text{ نامنظم است.} \quad (3)$$

(مهندسی کامپیوتر - 81)

19- نوع زبان $L = \{a^n b^m \mid m \leq n^2, n \leq 1000\}$ کدام است؟

$$(1) \text{ منظم است.}$$

$$(2) \text{ مستقل از متن است و منظم نیست.}$$

$$(3) \text{ حساس به متن است و مستقل از متن نیست.}$$

$$(4) \text{ بدون محدودیت است و حساس به متن نیست.}$$

(مهندسی کامپیوتر - 81)

20- کدام یک از زبان‌های زیر روی الفبای $\{0,1\}$ منظم نیست؟

$$(1) \text{ تمامی رشته‌هایی که پنجمین سمبل آن‌ها از راست 0 است.}$$

$$(2) \text{ مجموعه تمامی رشته‌هایی که به تعداد مساوی صفر و یک دارند.}$$

$$(3) \text{ مجموعه همه رشته‌های که به عنوان یک عدد باینری بر 12 بخش پذیرند.}$$

$$(4) \text{ مجموعه تمامی رشته‌هایی که طول آن‌ها 12 است.}$$

21- فرض کنید L_1 زبان عبارت منظم a^* و L_2 زبان عبارت منظم b^* و $L_3 = \{a^n b^n \mid n > 0\}$ و زبان L از الحاق سه زبان فوق

(مهندسی کامپیوتر - 79)

بدست می‌آید. $(L = L_1.L_2.L_3)$ کدام یک از گزینه‌های زیر درست است؟

$$(1) L \text{ یک زبان منظم است.}$$

$$(2) L \text{ یک زبان مستقل از متن است و منظم نیست.}$$

$$(3) L \text{ یک زبان حساس به متن است و مستقل از متن نیست.}$$

$$(4) \text{ هر سه مورد درست است.}$$

22- گزاره نادرست را انتخاب کنید. (علوم کامپیوتر - 79)

- (1) اگر L_1 و L_2 منظم باشند آن‌گاه $L_1 \cap L_2$ منظم است.
- (2) L زبانی داده شده است. با استفاده از لم پمپاژ برای مجموعه‌های منظم (Pumping lemma) می‌توان به سؤال «آیا L منظم است؟» پاسخ گفت.
- (3) اگر L زبانی منظم روی الفبای Σ باشد، آن‌گاه $\Sigma^* - L$ نیز منظم است.
- (4) اگر M_1 و M_2 دو اتوماتون متناهی قطعی (deterministic) باشند، می‌توان اتوماتون متناهی قطعی دیگری یافت که زبان پذیرفته شده توسط آن برابر با اجتماع زبان‌های پذیرفته شده توسط M_1 و M_2 باشد.

23- فرض کنید Σ یک الفبا و L یک زبان بر روی Σ و N مجموعه اعداد طبیعی باشد. L یک زبان قابل تعریف به وسیله Finite Automata نیست اگر: (مهندسی کامپیوتر - 76)

- (1) $(\exists n \in \mathbb{N})(\forall x \in L \text{ such that } |x| \geq n)(\exists u, v, w \in \Sigma^*) \text{ such that } x = uvw, |uv| \leq n, |v| \geq 1 \text{ and } (\forall i \in \mathbb{N})(uv^i w \in L)$
- (2) $(\forall n \in \mathbb{N})(\exists x \in L \text{ such that } |x| \geq n)(\forall u, v, w \in \Sigma^*) \text{ such that } x = uvw, |uv| \leq n, |v| \geq 1, \text{ and } (\exists i \in \mathbb{N} \text{ such that } uv^i w \notin L)$
- (3) $(\forall n \in \mathbb{N})(\exists x \in L \text{ such that } |x| \geq n)(\forall u, v, w \in \Sigma^*) \text{ such that } x = uvw, |uv| \leq n, |v| \geq 1, \text{ and } (\exists i \in \mathbb{N} \text{ such that } uv^i w \in L)$
- (4) $(\exists n \in \mathbb{N})(\forall x \in L \text{ such that } |x| \geq n)(\exists u, v, w \in \Sigma^*) \text{ such that } x = uvw, |uv| \leq n, |v| \geq 1 \text{ and } (\forall i \in \mathbb{N})(uv^i w \notin L)$

24- کدام گزاره نادرست است؟ (علوم کامپیوتر - 86)

- (1) اشتراک دو زبان منظم روی یک مجموعه الفبای مشخص حتماً منظم است.
- (2) هر زبان نامنظم زیرمجموعه یک زبان منظم است.
- (3) هر زبان ناتهی حتماً شامل یک زبان ناتهی و منظم است.
- (4) اجتماع تعداد دلخواهی از زبان‌های منظم حتماً منظم است.

25- کدام گزینه نادرست است؟ (علوم کامپیوتر - 84)

- (1) اگر L_1 و L_2 زبان‌هایی منظم باشند و $L_1 \subseteq L \subseteq L_2$ ، آن‌گاه L منظم است.
- (2) هر زبان منظم نامتناهی شامل یک زبان منظم ناتهی دیگر است.
- (3) هر زبان دلخواه زیرمجموعه یک زبان ناتهی دیگر است.
- (4) برای هر عدد $k \in \mathbb{N}, k \neq 0$ ، اجتماع k زبان منظم دلخواه در $\{0,1\}^*$ یک زبان منظم است.

26- اگر $L \subseteq \{0,1\}^*$ یک زبان نامنظم باشد، آن‌گاه: (علوم کامپیوتر - 86)

- (1) $L.L$ حتماً نامنظم است.
- (2) L^* حتماً نامنظم است.
- (3) برای هر زیرمجموعه متناهی $F \subseteq \{0,1\}^*$ حتماً $L \cup F$ نامنظم است.
- (4) $L.L.L$ حتماً نامنظم است.

27- کدام عبارت صحیح است؟ (مقصود از ε رشته‌ای به طول صفر است) (مهندسی کامپیوتر - 89)

- (1) در هر زبان منظم L رشته‌ای مثل z وجود دارد به قسمی که $vu = z$ و $v \neq \varepsilon$ و برای هر مقدار صحیح i رشته $z = uv^i w$ نیز متعلق به زبان L است.
- (2) برای هر زبان منظم L عددی صحیح مثل k وجود دارد به قسمی که اگر رشته‌ای از L مثل z با طول بزرگ‌تر از k داشته باشیم، آن‌گاه حتماً رشته‌ای از L با طول کوچک‌تر از k نیز خواهیم داشت.
- (3) اگر رشته‌ای از زبان L مثل $z = uvw$ وجود داشته باشد به قسمی که برای هر $i \geq 0$ رشته $z = uv^i w$ متعلق به L باشد آن‌گاه L زبانی منظم است.
- (4) هر سه مورد صحیح است.

28- زبان‌های زیر با $\alpha, \gamma \in \Sigma^*$, $\beta \in \Sigma^+$ مفروضند. کدام گزینه صحیح است؟ (مهندسی کامپیوتر - 87)

- $$L_1 = \{\alpha^i (\alpha\beta)^j (\gamma\alpha)^i \mid j \geq 0, i \geq 0\}$$
- $$L_2 = \{\alpha^i (\alpha\beta)^j (\gamma\alpha)^{i+j} \mid j \geq 0, i \geq 1\}$$
- $$L_3 = \{\alpha^i (\alpha\beta)^j (\gamma\alpha)^i \mid j \geq 1, i \geq 1\}$$
- (1) L_1 و L_3 هر دو منظم هستند.
 - (2) L_1 منظم و L_3 نامنظم است.
 - (3) L_1 منظم و L_2 نامنظم است.
 - (4) L_1, L_2 و L_3 همگی نامنظم هستند.

29- کدام یک از زبان‌های زیر نامنظم است؟ (مهندسی کامپیوتر - 85)

- (1) $\{a^n b^n (a+b)^* \mid n \geq 0\}$
- (2) $\{b^* a^n b^n a^* \mid n \geq 0\}$
- (3) $\{a^* a^n b^n b^* \mid n \geq 0\}$
- (4) هر سه نامنظم هستند.

30- آتوماتون متناهی M با n حالت مفروض است. زبان L شامل تمام رشته‌هایی است که M به ازای آن رشته‌ها از تمام حالات پذیرش خود گذر می‌کند. کدام گزینه در مورد L صحیح است؟ (علوم کامپیوتر - 96)

- (1) L همواره منظم است.
- (2) برای $n > 1$ زبان L لزوماً منظم نیست.
- (3) زبان L ممکن است مستقل از متن نباشد.
- (4) زبان L همواره مستقل از متن است ولی لزوماً منظم نیست.

31- فرض کنید L_1 و L_2 منظم است. حال زبان‌های زیر را در نظر بگیرید: (علوم کامپیوتر - 97)

- $$L'_1 = \left\{ w \mid w = u_1 v_1 u_2 v_2 \dots u_n v_n, \begin{matrix} u_1 \dots u_n \in L_1 \\ v_1 \dots v_n \in L_2 \end{matrix}, u_i, v_i \in \Sigma \right\}$$
- $$L'_2 = \left\{ w \mid w = u_1 v_1 u_2 v_2 \dots u_n v_n, \begin{matrix} u_1 \dots u_n \in L_1 \\ v_1 \dots v_n \in L_2 \end{matrix}, u_i, v_i \in \Sigma^* \right\}$$
- (1) L'_1 و L'_2 منظم هستند.
 - (2) L'_1 و L'_2 نامنظم هستند.
 - (3) L'_1 منظم ولی L'_2 نامنظم است.
 - (4) L'_2 منظم ولی L'_1 نامنظم است.

32- براساس چه مقداری از $L.w$ منظم می‌شود؟ (علوم کامپیوتر - 97)

- $$L = \{a^n w b^n \mid n \geq 0\}$$
- (1) $w \in \{a, b\}^*$
 - (2) $w \in \{a, b\}^*$
 - (3) $w \in \{c, d\}^*$
 - (4) هیچ‌کدام

33- در چه صورتی گزاره زیر در مورد زبان منظم L صحیح است؟ (علوم کامپیوتر - 98)

«اگر $x \in L$ آنگاه $y \in L$ که y با حذف بخشی پیوسته از x به دست آمده است و $|x| > |y|$ »

- (1) زبان L نامتناهی باشد.
- (2) طول x بزرگ‌تر از صفر باشد.
- (3) زبان L متناهی و x بیشترین طول را در بین اعضای L داشته باشد.
- (4) زبان L نامتناهی و طول x از مقدار مشخصی بیشتر باشد.

34- کدام مورد صحیح است؟ (علوم کامپیوتر - 98)

$B_1 = \{l^k y l^k \mid y \in \{0,1\}^*, k \geq 1 \text{ و } y \text{ شامل حداقل } k \text{ تا یک}\}$

$B_2 = \{l^k y l^k \mid y \in \{0,1\}^*, k \geq 1 \text{ و } y \text{ شامل حداکثر } k \text{ تا یک}\}$

- (1) زبان B_1 و B_2 منظم است.
- (2) زبان B_1 و B_2 نامنظم است.
- (3) زبان B_1 منظم و B_2 نامنظم است.
- (4) زبان B_1 نامنظم و B_2 منظم است.

35- همه موارد زیر صحیح‌اند، به جز: (علوم کامپیوتر - 98)

- (1) برای هر زبان منظم، یک زیرمجموعه منظم وجود دارد.
- (2) برای هر زبان نامنظم، یک زیرمجموعه منظم وجود دارد.
- (3) برای هر زبان منظم، یک زیرمجموعه سره منظم وجود دارد.
- (4) برای هر زبان نامنظم، یک زیرمجموعه سره منظم وجود دارد.

36- فرض کنید:

$$L_1 = \{0^{2n} 1^n \mid n \geq 0\}$$

$$L_2 = \{a^i b^j c^k \mid i + j = k\}$$

(علوم کامپیوتر - 1400)

کدام گزینه در مورد این دو زبان درست است؟

- (1) L_1 و L_2 هیچ‌کدام منظم نیستند.
- (2) L_1 منظم است ولی L_2 منظم نیست.
- (3) L_2 منظم است ولی L_1 منظم نیست.
- (4) L_1 و L_2 هر دو منظم هستند.

37- فرض کنیم L_1 و L_2 به ترتیب زبان دو گرامر G_1 و G_2 باشد (S متغیر شروع):

$$G_1 : S \rightarrow aSbS \mid bSaS \mid \lambda$$

$$G_2 : S \rightarrow aSa \mid bSb \mid \lambda$$

(علوم کامپیوتر - 1401)

کدام یک از این دو زبان منظم هستند؟

- (1) فقط L_1
- (2) فقط L_2
- (3) هر دو
- (4) هیچ‌کدام

38- اگر L یک زبان منظم باشد، عدد صحیح مثبت p به نام طول تزریق L وجود دارد که هر رشته $w \in L$ با $|w| \geq p$ را می‌توان با

شرایط گفته شده در لم تزریق تجزیه کرد. مقدار p منحصر به فرد نیست؛ چون اگر p طول تزریق L باشد، هر عدد بزرگ‌تر از p نیز هست. همواره می‌توان کوچک‌ترین طول تزریق را یافت. کوچک‌ترین طول تزریق برای زبان زیر چند است؟

{تعداد وقوع زیررشته 01 با تعداد وقوع زیررشته 10 در w برابر است $L = \{w \in \{0,1\}^* \mid$

- (1) 1
- (2) 2
- (3) 3
- (4) بزرگ‌تر مساوی 4

(علوم کامپیوتر - 1402)

39- کدام یک از گزینه‌های زیر نادرست است؟(1) اگر L^2 منظم باشد پس L منظم است.(2) برای هر زبان منظم L می‌توان یک NFA با چند حالت شروع ارائه نمود.(3) برای زبان منظم SL شامل λ نیست می‌توان یک NFA بدون λ ارائه نمود که شامل یک state پایانی باشد و L را بپذیرد. (λ همان بلانک است).

(4) اجتماع زیرمجموعه‌ای نامتناهی از زبان‌های منظم الزاماً منظم نیست.

40- فرض کنید {هر بلوک از 0های متوالی در w اندازه زوج داشته باشد} $L_1 = \{w \in \{0,1\}^* \mid$ مثلاً 0000100 در L_1 هست ولی(علوم کامپیوتر - 1402) $L_2 = \{0^{3^n} \mid n \geq 0\}$ کدام یک از دو زبان فوق منظم است؟(1) فقط L_1 (2) فقط L_2 (3) هر دو (4) نه L_1 و نه L_2 **41- فرض کنیم زبان‌های $L_A \subseteq \Sigma^*$ و $L_B \subseteq \Sigma^*$ توسط DFA های $A = (Q_A, \Sigma, \delta_A, q_0, F_A)$ و $B = (Q_B, \Sigma, \delta_B, q'_0, F_B)$ داده**شده‌اند و $\Sigma = \{0,1,2\}$. اتوماتای C را با زبان L_C به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$C = (Q_A \times Q_B, \Sigma, \delta_C, (q_0, q'_0), F_A \times F_B)$$

$$\delta_C((p, q), a) = \{(p', q) : p' \in \delta_A(p, a)\} \cup \{(p, q') : q' \in \delta_B(q, a)\}$$

دو عبارت زیر، مفروض است.

I: اگر $010 \in L_A$ و $210 \in L_B$ آن‌گاه $021100 \in L_C$ II: اگر $010 \in L_A$ و $210 \in L_B$ آن‌گاه $210010 \in L_C$

(علوم کامپیوتر - 1403)

کدام موارد فوق، همواره درست است؟

(1) فقط I (2) فقط II (3) هم I و هم II (4) نه I و نه II

پاسخ‌ها

تست‌های 17 الی 41

فصل 3: زبان‌ها و گرامرهای منظم، عبارات منظم

17- گزینه (1) صحیح است.

$K^{-1}L$ همان خارج قسمت چپ زبان L بر زبان K است. چه در خارج قسمت راست و چه در خارج قسمت چپ داریم:

$$K^{-1}(L_1 \cap L_2) \subseteq K^{-1}L_1 \cap K^{-1}L_2$$

$$(L_1 \cap L_2)^{-1}K \subseteq L_1^{-1}K \cap L_2^{-1}KL_1$$

مثلاً:

$$L_1 = \{ab\}, L_2 = \{cb\}, K = \{a, c\}$$

$$\frac{L_1}{K} = \{b\}, \frac{L_2}{K} = \{b\}$$

$$\frac{L_1}{K} \cap \frac{L_2}{K} = \{b\} \Rightarrow \frac{L_1 \cap L_2}{K} \subseteq \frac{L_1}{K} \cap \frac{L_2}{K}$$

$$\frac{L_1 \cap L_2}{K} = \frac{\{\}\}{K} = \{\}$$

اما برای اجتماع، تساوی رخ می‌دهد:

$$(L_1 \cup L_2)^{-1}K = L_1^{-1}K \cup L_2^{-1}KL_1$$

$$K^{-1}(L_1 \cup L_2) = K^{-1}L_1 \cup K^{-1}L_2$$

18- گزینه (3) صحیح است.

در L_1 با انتخاب $w = \lambda$ داریم: $L_1 = \{a, b\}^*$. پس L_1 منظم است. زبانی مانند L_2 چه با شرط $w_1 \neq w_2$ چه با شرط $w_1 = w_2$ نامنظم است. زیرا ماشین متناهی بی‌حافظه است و نمی‌تواند تساوی یا عدم تساوی دو قسمت را محاسبه کند. زبان L_3 با $L_4 \cap L_5^R$ برابر است؛ پس اشتراک دو زبان منظم است، پس منظم است.

19- گزینه (1) صحیح است.

L متناهی است پس منظم است. پس مستقل از متن و حساس به متن و بدون محدودیت نیز هست.

20- گزینه (2) صحیح است.

گزینه یک با عبارت منظم $(0+1)^4 0 (0+1)^*$ معادل است. گزینه 4 با عبارت منظم $(0+1)^{12}$ معادل است. در گزینه سه برای بخش‌پذیری بر 12 یعنی بخش‌پذیری بر 4 و 3. بخش‌پذیری بر 4 با توجه به دو رقم انتهایی و بخش‌پذیری بر 3 با توجه به مجموع ارقام قابل تشخیص است.

21- گزینه (2) صحیح است.

L_1 و L_2 منظمند در نتیجه مستقل از متن هستند. L_3 مستقل از متن است. زبان‌های مستقل از متن تحت الحاق بسته‌اند پس $L_1.L_2.L_3$ مستقل از متن است؛ حاصل $L_1.L_2.L_3$ برابر است با:

$$L_1.L_2.L_3 = \{a^i b^j a^n b^n \mid i, j \geq 0, n > 0\}$$

با توجه به تساوی تعداد a و b ها در $a^n b^n$ این زبان نامنظم است. (در توان ماشین متناهی نیست)

22- گزینه (2) صحیح است.

گزینه‌های 1، 3 و 4 طبق ویژگیهای بستاری زبان‌های منظم درست هستند. اما برای اثبات منظم نبودن یک زبان از لم تزریق زبان‌های منظم استفاده می‌کنیم، پس گزینه 2 نادرست.

23- گزینه (2) صحیح است.

عکس نقیض لم تزریق یعنی گزینه 2، شرط کافی برای نامنظم بودن زبان L است.

24- گزینه (4) صحیح است.

زبان‌های منظم نسبت به اشتراک بسته‌اند. $\{ \} \subseteq L \subseteq \Sigma^* a \quad bbaaBB \notin$
 برای هر زبان L داریم: $\{ \} \subseteq L \subseteq \Sigma^*$ که $\{ \}$ و Σ^* منظم هستند. هر زبان ناتهی زیرمجموعه تک عضوی دارد و متناهی‌ها منظم هستند.
 اما هر زبان حتی زبان‌های نامنظم را می‌شود به صورت اجتماع تک عضوی‌ها نوشت. پس اجتماع هر تعداد منظم، منظم نیست.

25- گزینه (1) صحیح است.

برای رد گزینه یک به این مثال توجه کنیم: $\{ \} \subseteq \{a^n b^n \mid n \geq 0\} \subseteq \Sigma^*$. سایر گزینه‌ها درستند.
 هر زبان منظم نامتناهی $L = \{w_1, w_2, \dots\}$ زیرمجموعه تک عضوی $\{w_1\}$ دارد که منظم است.
 هر زبان دلخواه زیرمجموعه Σ^* است.
 زبان‌های منظم تحت اجتماع متناهی بسته‌اند.

26- گزینه (3) صحیح است.

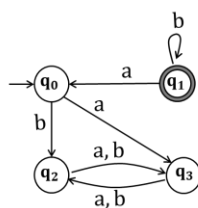
ممکن است L نامنظم باشد اما L.L و L.L.L و L^* منظم باشد به عنوان مثال:

$$L = \{a^k : k \text{ is not prime}\} \Rightarrow LL = \{a^n : n \neq 3\}, L^* = \{a^n : n \geq 0\}$$

گزینه 3 با برهان خلف ثابت می‌شود. اگر F متناهی و LUF منظم باشد آنگاه با حذف یک مجموعه متناهی از LUF، می‌توانیم به L برسیم. پس L منظم خواهد بود که تناقض است.

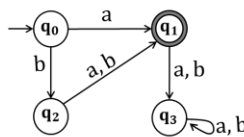
27- گزینه (2) صحیح است.

گزینه 2 درست است. اگر k را تعداد حالات ماشین DFA پذیرنده L فرض کنیم. وقتی رشته‌ای با طول بیشتر از k در L باشد حتما شامل یک جزء قابل تزریق (یک بخش قابل حذف یا تکرار) است که با حذف آن، رشته‌ای به طول کمتر از k در L به دست می‌آید.
 به طور کلی همانطور که در جزوه درسی گفته شده (شکل زیر) وقتی n تعداد حالات DFA باشد، تعداد رشته‌های عضو L در یکی از این سه حالت قرار دارد:



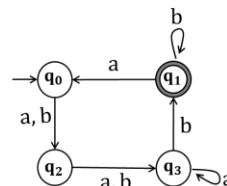
$$L(M) = \{ \}$$

تهی است.
هیچ رشته‌ای ندارد.



$$L(M) = \{a, ba, bb\}$$

متناهی است.
فقط رشته‌های با طول کمتر از n دارد.



$$L(M) = \{b^3, ab^2, b^4, bab^2, a^2b^2, a^2b^3, \dots\}$$

نامتناهی است.
هم رشته با طول کمتر از n هم با طول بیشتر از n دارد.

گزینه 1 برای زبان‌های منظم متناهی برقرار نیست. برای رد گزینه 3 زبان $L = \{a^n : n \geq 1\} \cup \{b^m c^m : m \geq 1\}$ را در نظر بگیرید.
 رشته‌هایی در زبان L وجود دارد که می‌توان آن‌ها را به شکل $z = uvw$ تجزیه کرد و $z = uv^i w$ نیز متعلق به L است اما این زبان منظم نیست.

28- گزینه (1) صحیح است.

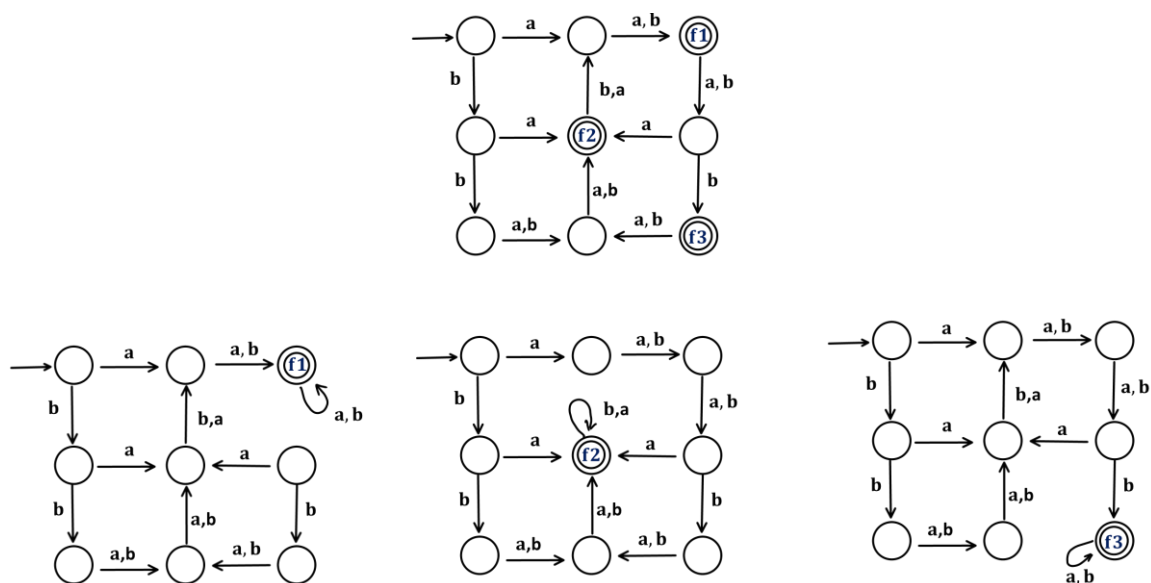
در L_1 با انتخاب $\alpha = \lambda$ ، $i=1$ ، $j=0$ می‌بینیم که هر $\gamma \in \Sigma^*$ عضو L_1 است پس $L_1 = \Sigma^*$ پس منظم است. به همین ترتیب $L_2 = \Sigma^*$ و $L_3 = \Sigma^+$ منظم هستند.

29- گزینه (2) صحیح است.

اگر به حالت $n=0$ در گزینه 1 توجه کنیم معلوم می‌شود این زبان برابر $(a+b)^*$ است همینطور گزینه 3 برابر با a^*b^* است پس منظم هستند. اما گزینه 2 برابر با $\{b^i a^n b^n a^j \mid i, j, n \geq 0\}$ است و ماشین متناهی توان محاسبه آن را ندارد. این گزینه نامنظم است.

30- گزینه (1) صحیح است.

فرض کنیم $F = \{f_1, f_2, \dots, f_m\}$ مجموعه حالات پایانی ماشین M باشد. فرض کنیم L_1 مجموعه همه رشته‌هایی باشد که با مصرف آنها از f_1 عبور می‌کنیم. در ماشین M فقط f_1 را به عنوان حالت پذیرش نگه داریم و تمام انتقال‌های خروجی از f_1 را به f_1 برگردانیم. در اینصورت ماشین متناهی پذیرنده برای L_1 خواهیم داشت. پس L_1 منظم است. به همین ترتیب اگر فرض کنیم L_k مجموعه همه رشته‌هایی باشد که با مصرف آنها از f_k عبور می‌کنیم، L_k منظم است. زبان‌های منظم تحت اشتراک بسته‌اند. پس $A = L_1 \cap L_2 \cap \dots \cap L_m$ منظم است.

**31- گزینه (1) صحیح است.**

زبان‌های منظم نسبت به بر زدن به شکل‌های گفته شده (حرف به حرف یا رشته به رشته) بسته هستند.

32- گزینه (2) صحیح است.

اگر $w \in \{a, b\}^*$ زبان $L = \{a^n w b^n \mid w \in (a+b)^n, n \geq 0\}$ برابر $(a+b)^*$ و منظم است. در سایر موارد شرط تساوی تعداد a و b ها در رشته $a^n w b^n$ باعث نامنظم بودن L می‌شود.

33- گزینه (4) صحیح است.

براساس لم تزریق، اگر زبان L منظم و نامتناهی باشد آنگاه یک n وجود دارد که برای رشته‌های با طول بیشتر از آن، آن رشته شامل یک قسمت قابل تزریق (قابل تکرار و قابل حذف) است. پس گزینه 4 صحیح است. برای رد سایر گزینه‌ها:

زبان $L = \{aa, bb\}$ منظم متناهی است اما نمی‌توان از هر رشته آن بخشی را حذف کرد و باز هم عضو L به دست آید. همین مثال گزینه 2 را رد می‌کند. برای زبان منظم نامتناهی نیز این گزاره برای همه رشته‌ها صحیح نیست مثلاً در زبان $L = \{a^2, a^3, a^4, \dots\}$ به ازای رشته $x = aa$ ، رشته کوچکتر y وجود ندارد اما از یک اندازه به بعد می‌توان از هر رشته، یک بخش پیوسته را حذف کرد و رشته کوچکتری در L یافت.

34- گزینه (3) صحیح است.

رشته‌های B_1 به ازای $k=1$ به فرم $1 \underbrace{1(0+1)^* 1(0+1)^* 1(0+1)^*}_{y} 11$ هستند. به ازای $k=2$ به فرم $11 \underbrace{(0+1)^* 1(0+1)^* 1(0+1)^*}_{y} 11$ و به همین ترتیب به ازای هر k اما با کمی دقت متوجه می‌شویم که همه این رشته‌ها در همان عبارت $1 \underbrace{(0+1)^* 1(0+1)^*}_{y} 1$ توصیف شده‌اند پس B_1 معادل $1(0+1)^* 1(0+1)^* 1$ است و منظم است.

نامنظم بودن B_2 مشخص است اما با استفاده از لم تزریق قابل اثبات است. برای $n \geq 1$ رشته $w = 1^n 0 1^n 0 1^n$ وجود دارد که شرط تزریق را ندارد. اگر آن را به $w = x v z$ تفکیک کنیم شرط $|xv| \leq n$ می‌گوید زیر رشته xv فقط از الفبای 1 تشکیل می‌شود. پس داریم:

$$w = 1^n 0 1^n 0 1^n = 1^m \underbrace{1^p 1^{n-m-p} 0 1^n 0 1^n}_z$$

$x \quad v$

در نتیجه:

$$w_k = x v^k z = 1^m \underbrace{1^{kp} 1^{n-m-p} 0 1^n 0 1^n}_z$$

$x \quad v^k$

برای $k=0$ داریم:

$$w_0 = x v^0 z = x \lambda z = 1^m \underbrace{1^{n-m-p} 0 1^n 0 1^n}_z = 1^{n-p} 0 1^n 0 1^n \notin B_2$$

$x \quad z$

پس B_2 منظم نیست.**35- گزینه (3) صحیح است.**

گزینه 1 بدیهی است چون $\{ \} \subseteq L$ و $L \subseteq L$. گزینه‌های 2 و 4 درستند چون زبان نامنظم حتماً نامتناهی است پس دارای زیرمجموعه‌های متناهی است که منظم هستند. اما در گزینه 3 ممکن است $L = \emptyset$ باشد و هیچ زیرمجموعه سرهای نداشته باشد. البته گزینه 3 برای هر زبان منظم ناتنهی درست است.

36- گزینه (1) صحیح است.

می‌دانیم ماشین‌های متناهی به دلیل بی‌حافظه بودن نمی‌توانند ارتباط بین تعداد الفباها را کنترل و محاسبه کنند مگر آنکه تعداد الگوها متناهی باشد. پس هیچکدام از زبان‌های L_1 و L_2 منظم نیستند.

روش دوم: منظم نبودن L_1 با استفاده از لم تزریق، و توجه به رشته‌های $0^{2n} 1^n$ در حالت $k=0$ به اثبات می‌رسد. منظم نبودن L_2 با استفاده از لم تزریق، و توجه به رشته‌های $a^n b^n c^{2n}$ در حالت $k=0$ به اثبات می‌رسد.

37- گزینه (4) صحیح است.

L_1 برابر است با $\{w \in (0+1)^* : n_a(w) = n_b(w)\}$ که نامنظم است.

L_2 برابر است با $\{ww^R : w \in (0+1)^*\}$ که نامنظم است.

38- گزینه (2) صحیح است.

برای آنکه تعداد ab با تعداد ba برابر باشد کفایت الفبای ابتدا و انتهای رشته یکسان باشد. رشته تهی هم عضو زبان است:

$$L = \lambda + 0 + 1 + 0(0+1)^*0 + 1(0+1)^*1$$

با نوشتن چند رشته از این زبان داریم:

$$L = \{\lambda, 0, 1, 00, 11, 010, 101, 000, \dots\}$$

رشته λ بخش قابل تزریق ناتهی ندارد. در ضمن انتخاب $p=1$ درست نیست. دقت کنید که در تجزیه $w = xvz$ لازم است $v \neq \lambda$ و $|xv| \leq p$ باشد. اگر $p=1$ ناچاریم همیشه x را تهی و v را اولین الفبا در نظر بگیریم. ممکن است در نگاه اول تکرار کردن اولین الفبا مشکلی در عضویت L ایجاد نکند زیرا باز هم اولین و آخرین الفبا یکسان خواهند بود، اما در لم تزریق حالت $k=0$ نیز وجود دارد یعنی باید بتوانیم v را حذف کنیم. بنابراین در رشته‌ای مانند 101 شرط تزریق برقرار نمی‌شود:

$$p=1 \rightarrow w=101=xvz, |xv| \leq 1, |v| \neq 0$$

$$\rightarrow x=\lambda, v=1, z=01 \rightarrow w_k = xv^kz \rightarrow w_0 = xz = 01 \notin L$$

اما با انتخاب $p=2$ می‌توانیم برای هر رشته به طول حداقل 2 با انتخاب x مساوی اولین حرف، و v مساوی دومین حرف و z مساوی باقیمانده حروف، شرط تزریق را برقرار کنیم. تکرار شدن یا حذف شدن دومین الفبا، باعث عدم عضویت در L نمی‌شود.

39- گزینه (1) صحیح است.

منظم بودن L^2 شرط کافی برای منظم بودن L نیست. مثلاً زبان $L = \{0^p \mid p \text{ is not prime}\}$ نامنظم است اما $L^2 = \{0^n \mid n \neq 3\}$ منظم است. البته عکس این مطلب درست است. اگر L منظم باشد، L^2 نیز منظم است.

گزینه 2 درست است. برای هر زبان منظم L می‌توان یک NFA با چند حالت شروع ارائه داد. اگر ماشین فعلی یک حالت شروع دارد می‌توانیم یک حالت شروع دیگر با انتقالهایی که همگی به حالت تله می‌روند به ماشین اضافه کرد.

در گزینه 3 اشتباه تایپی کوچکی رخ داده است. متن درست آن چنین است: [برای زبان منظم L که شامل λ نیست می‌توان یک NFA بدون λ ، ارائه نمود که شامل یک state پایانی باشد و L را بپذیرد.] این گزینه درست است. هر زبان منظم دارای NFA پذیرنده با فقط یک حالت پایانی است و اگر λ عضو L نباشد این NFA می‌تواند فاقد انتقال λ باشد.

گزینه 4 نیز درست است. اجتماع نامتناهی از زبان‌های منظم، لزوماً منظم نیست. مثلاً $\{a^n b^n \mid n \geq 1\}$ را می‌توان به صورت اجتماع نامتناهی از تک عضوی‌ها نوشت:

$$\{a^n b^n \mid n \geq 1\} = \{ab\} \cup \{a^2 b^2\} \cup \dots$$

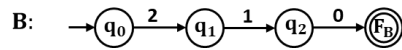
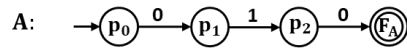
40- گزینه (1) صحیح است.

L_1 منظم است زیرا با عبارت منظم $(00+1)^*$ معادل است.

برای توابع غیر خطی مانند $f(n) = n^2, f(n) = 2^n, f(n) = 3^n, f(n) = n!$ زبان $\{0^{f(n)} \mid n \geq 0\}$ نامنظم است بنابراین L_2 نامنظم است. نامنظم بودن این زبان‌ها با لم تزریق ثابت می‌شود که نمونه‌هایی از آن را در تمرینات پیشین دیده‌ایم.

41- گزینه (3) صحیح است.

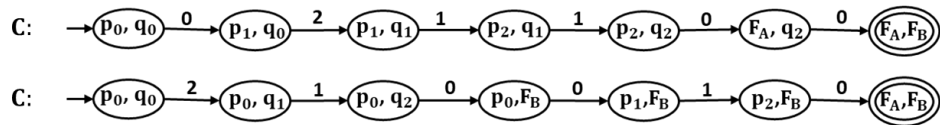
کلید اولیه این سوال گزینه 1 است. اما نشان می‌دهیم هر دو جمله صحیح هستند. طبق فرض $010 \in L_A$ و $210 \in L_B$. پس در ماشین متناهی قطعی A مسیری وجود دارد که با مصرف 010 به یک حالت پذیرش می‌رسد و مسیری هم در B وجود دارد که با مصرف 210 به حالت پذیرش می‌رسد.



دقت کنید که اینجا فقط بخشی از گراف انتقال A و B را نشان می‌دهند. (در ضمن ممکن است این‌ها مسیر ساده نباشند بلکه دارای دور باشند برای مثال ممکن است p_0 همان p_1 باشد. در هر صورت آنچه برای ما اهمیت دارد وجود یک مسیر پذیرش برای رشته‌های مفروض است که از آن اطمینان داریم). حالا نشان می‌دهیم هر دو رشته 021100 و 210010 توسط ماشین C پذیرفته می‌شوند. ماشین C یک NFA با مجموعه حالات $Q_A \times Q_B$ است. مثلاً نتیجه انتقال $\delta_C((p_1, q_1), 1) = \{(p_2, q_1), (p_1, q_2)\}$ دو عضو است. می‌توانیم مولفه اول را با الفبای 1 انتقال دهیم یا مولفه دوم را با آن الفبا انتقال دهیم:

$$\delta_C((p_1, q_1), 1) = \{(\delta_A(p_1, 1), q_1)\} \cup \{(p_1, \delta_B(q_1, 1))\} = \{(p_2, q_1), (p_1, q_2)\}$$

برای آنکه رشته‌ای توسط C پذیرفته شود لازم نیست همه مسیرهای محاسبه به پذیرش منجر شوند بلکه کفایت یکی از مسیرهای محاسبه به حالت یا حالات پذیرش $F_A \times F_B$ برسد. در شکل زیر مسیر محاسبه منجر به پذیرش را برای هر دو رشته 021100 و 210010 نشان داده‌ایم.



پیروز و سربلند باشید.

پایان جلسه هشتم نکته و تست